

Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre mit Ergänzungen zur Erdatmosphäre

Karl Schwarzschild
neu gesetzt und kommentiert
Dipl.-Physiker Jochen Ebel

16. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

Erläuterungen	2
Bearbeitung	2
0 Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre - Digitalisierung	2
1 Inhaltsübersicht	3
2 Verschiedene Arten des Gleichgewichts	5
2.1 Isothermes Gleichgewicht	5
2.2 Adiabatisches Gleichgewicht	5
2.3 Strahlungsgleichgewicht	6
3 Stabilität des Strahlungsgleichgewichts	9
3a Zusatzbemerkung 2015	10
4 Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe	10
5 Verzeichnisse	15
Abbildungsverzeichnis	15
Tabellenverzeichnis	15
Literaturverzeichniss	15

Erläuterungen

Schwarzschild hat bereits 1906 die Grundzüge des Treibhauseffektes beschrieben. Die Erhöhung der CO_2 -Konzentration war damals kaum ein öffentliches Thema, während das Verständnis der Sonne damals ein wichtiges Thema war. Zum Verständnis der Erscheinungen in der Sonnenatmosphäre hat Schwarzschild wiederholt Vergleiche zur Erdatmosphäre gezogen. Gleichzeitig können heute Schwarzschilds Erkenntnisse zum Verständnis des Treibhauseffektes beitragen - besonders für Leute, die Probleme mit modernen Darstellungen haben, weil Sie glauben moderne Darstellungen wären gefälscht. Die Vermutung, daß eine höhere CO_2 -Konzentration einen Anstieg der Tropopausenhöhe verursacht kam erst 2 Jahre später durch Gold (1909), dem späteren Präsidenten der englischen meteorologischen Gesellschaft.

Auf die Originalarbeit kann beim Göttinger Digitalisierungszentrum http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN252457811_1906&DMDID=DMDLOG_0009 zugegriffen werden.

Damit sich die Erläuterungen von der Originalarbeit abheben, sind die **Erläuterungstexte in blau**. An manchen Stellen ist die Rechtschreibung an die heutige Rechtschreibung angepaßt.

Bearbeitung

Das Paper von Schwarzschild ist ein wegweisendes Paper für die Verhältnisse von Gasatmosphären. Gegenüber einer Veröffentlichung von 1906 hat sich heute die Schreib- und Ausdrucksweise leicht verändert. Bei der Wiedergabe von Schwarzschilds Paper wurde die Schreibweise leicht an das heute Übliche angepaßt und weitere Erleichterungen für den Leser durchgeführt. Z. B. tritt die Konstante k sowohl in der Bedeutung als Verhältnis der spezifischen Wärme auf als auch als Absorptionskonstante. Für die letztere Bedeutung wird das k durch κ ersetzt. Auch die Angabe der Literaturstellen wurden der modernen Zitierweise angepaßt. Schwarzschild benutzt auch eine heute unübliche Winkelfunktion, den Sekans (\sec) diese ist ähnlich wie der \cot (Kotangens = reziproker Wert des Tangens, also $\cot i = 1/\tan i$) die Umkehrung des Kosinus, also $\sec i = 1/\cos i$.

0 Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre - Digitalisierung

by Schwarzschild, K.

in: Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse

Göttingen; 1895, 1933

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright.

Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Göttingen State- and University Library.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Göttingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Göttingen

Germany

Übersetzung von Terms and Conditions = AGB

Die Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek bietet Zugriff auf digitalisierte Dokumente ausschließlich für nichtkommerzielle Bildungs-, Forschungs- und private Zwecke und gibt keinerlei Garantien im Hinblick auf ihre Verwendung für andere Zwecke. Einige unserer Sammlungen sind urheberrechtlich geschützt.

Veröffentlichung und/oder Sendung in irgendeiner Form (elektronisch) bedarf der vorherigen schriftlichen Genehmigung von der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen.

Reproduktionen von Material auf der Website darf nicht nachgeholt werden oder gesendet zu anderen Repositories, noch weiter, ohne schriftliche Genehmigung werden von der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek reproduziert.

Für die Reproduktion Zugriffe und Berechtigungen, kontaktieren Sie uns bitte. Wenn unter Berufung auf Materialien, geben Sie bitte richtige Zuordnung der Quelle.

Kontakt:

Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Beim Neusatz sind Kommentare eingefügt worden - diese Kommentare sind in blauer Schrift.

#####

Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre

Von K. Schwarzschild.

Vorgelegt in der Sitzung vom 13. Januar 1906.

1 Inhaltsübersicht

Anmerkung: Beim Lesen dieses Papers ist das gewählte Koordinatensystem zu beachten. Sowohl bei der Sonnenatmosphäre (wie im vorliegendem Paper) als auch bei Planetenatmosphären wird in der Regel eine Art Zylinderkoordinatensystem benutzt. Aber bei diesem Koordinatensystem kommt es auf die Richtung der Zylinderachse an. Bei Planetenatmosphären nimmt man als Nullpunkt meistens die Planetenoberfläche und der z -Wert nimmt zu, um so größer die Entfernung vom Planetenmittelpunkt (Höhe) ist. Schwarzschild benutzt ein umgedrehtes Koordinatensystem, wo der Nullpunkt nahe des Randes der Sonnenatmosphäre liegt (siehe: $\gg h$ ist von einer Stelle \dots \ll Seite 9 - Absatz nach Gleichung

(16 auf Seite 9)) und der z -Wert nimmt zu, um so geringer die Entfernung zum Sonnenmittelpunkt (Tiefe) ist. Zu berücksichtigen ist auch, daß Schwarzschild für Integrationsgrenze und Integrationsvariable oft das gleiche Zeichen benutzt.

Die Sonnenoberfläche zeigt uns in Granulationen, Sonnenflecken und Protuberanzen wechselnde Zustände und stürmische Veränderungen. Um die physikalischen Verhältnisse zu begreifen, unter denen diese Erscheinungen stehen, pflegt man in erster Annäherung den räumlichen und zeitlichen Wechsel durch einen mittleren stationären Zustand, ein mechanisches Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre zu ersetzen. Im Vordergrund der Betrachtung stand bisher allgemein das sog. *adiabatische Gleichgewicht*, wie es in unserer Atmosphäre (d.h. in der Erdatmosphäre) herrscht, wenn sie von auf- und absteigenden Strömungen gründlich durchmischt ist (das sind die Verhältnisse in der Troposphäre - mit den Strömungen sind auch starke Turbulenzen verbunden = chaotisches Wetter). Ich möchte hier auf eine andere Art des Gleichgewichts aufmerksam machen, welche man als »Strahlungsgleichgewicht« bezeichnen kann. Strahlungsgleichgewicht wird sich in einer stark strahlenden und absorbierenden Atmosphäre einstellen, in welcher die durchmischende Wirkung auf- und absteigender Ströme gegenüber dem Wärmeaustausch durch Strahlung zurücktritt (das gilt für die Stratosphäre). Ob für die Sonne mehr das adiabatische oder das Strahlungsgleichgewicht gilt, wäre aus allgemeinen Gründen schwer zu entscheiden. Indessen gibt es Beobachtungsdaten, welche ein gewisses Urteil ermöglichen. Die Sonnenscheibe ist nicht gleichmässig hell, sondern vom Centrum nach dem Rande zu abgetönt (= weniger hell). Aus dieser Helligkeitsverteilung auf der Oberfläche lässt sich unter plausibeln Annahmen zurückschliessen auf die Temperaturverteilung in der Tiefe. Das Resultat ist, daß das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre im Grossen und Ganzen dem Strahlungsgleichgewicht entspricht. *Genauer, wie auch aus dem weiteren Text hervorgeht ist statt »Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre« gemeint »Gleichgewicht der oberen Schicht der Sonnenatmosphäre«.*

Die Überlegungen, die zu diesem Resultat führen, setzen voraus, daß das Kirchhoff'sche Gesetz gilt oder - in andern Worten daß die Strahlung der Sonnenatmosphäre reine Temperaturstrahlung ist. (Auch alle Strahlungen in der Erdatmosphäre sind reine Temperaturstrahlungen - ausgenommen z. B. Versuche mit Laserstrahlung.) Sie setzen ferner voraus, daß man beim Eindringen in den Sonnenkörper einer kontinuierlichen Änderung des Zustandes begegnet und nicht aus einer ziemlich durchsichtigen Chromosphäre diskontinuierlich in eine aus leuchtenden Wolken gebildete undurchsichtige Photosphäre gerät. (Näheres ist in einem späteren Paper zu lesen: (Milne, 1928)) Vernachlässigt ist die Wirkung der Streuung des Lichts durch Beugung an den Teilchen der Atmosphäre, auf deren Bedeutung Herr A. (Schuster, 1905, S. 1) aufmerksam gemacht hat, ebenso ist die Refraction vernachlässigt, die Herr von (Seeliger, 1891, p. 264) zur Erklärung der beobachteten Helligkeitsverteilung heranzieht. Auch wird die verschiedene Absorption verschiedener Wellenlängen, die Abnahme der Schwere mit der Höhe und die kugelförmige Ausbreitung der Strahlung nicht berücksichtigt. (Diese Vereinfachungen haben Einfluß auf die Existenz und Höhe der Tropopause.) Die ganze Betrachtung kann daher keineswegs als abschliessend oder zwingend gelten, doch mag sie weiteren Spekulationen einen Anhalt geben, indem sie einen einfachen Gedanken zunächst in einfachster Form ausführt.

2 Verschiedene Arten des Gleichgewichts

Man bezeichne den Druck mit p , die absolute Temperatur (in Centesimalgraden¹⁾ mit t , die Dichte mit ϱ , das Molekulargewicht (im Vergleich zum Wasserstoffatom) mit M , die Schwere mit g , die Tiefe in der Atmosphäre (von einem beliebigen Anfangspunkt nach innen gerechnet) mit h . Die Einheiten entnehme man den Verhältnissen, die an der Erdoberfläche bestehen, wähle also als Einheit von p die Atmosphäre, als Einheit von ϱ die Dichte der Luft bei 273° absoluter Temperatur (= K) unter dem Druck einer Atmosphäre, als Einheit von g die Schwere auf der Erdoberfläche und als Einheit von h die Höhe der sog. »homogenen Atmosphäre«, welche 8 km beträgt.

Es gilt dann für ein ideales Gas die Beziehung:

$$\varrho t = \frac{p \cdot M}{R} \quad R = 0.106 \quad (1)$$

und die Bedingung des mechanischen Gleichgewichts der Atmosphäre lautet

$$dp = \varrho g dh \quad (2)$$

Die Elimination von ϱ aus Gleichung (1) und Gleichung (2) ergibt:

$$\frac{dp}{p} = \frac{M}{R} \cdot \frac{g}{t} dh = \frac{1}{p} dp \Rightarrow \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{M}{R} \cdot \frac{g}{t} \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{dh} = \frac{M}{R} \cdot \frac{g}{t} \cdot p \frac{dt}{dp} \quad (3)$$

2.1 Isothermes Gleichgewicht

Ein isothermes Gleichgewicht liegt in der Erdatmosphäre fast nie vor - nur im Bereich oberhalb der Tropopause bis unterhalb der Ozonschicht ist die Erdatmosphäre fast isotherm. Zur allgemeinen Orientierung betrachte man ein isothermes Gleichgewicht, setze t als konstant voraus (weil Isothermie betrachtet wird). Es folgt dann:

$$p = p_0 e^{-\frac{M}{R} \cdot \frac{g}{t} h} \quad \varrho = \varrho_0 e^{-\frac{M}{R} \cdot \frac{g}{t} h} \quad (4)$$

Die Schwere g ist auf der Sonne 27,7 mal größer, als auf der Erde, die Temperatur (rund 6000°) etwa 20 mal höher. Es folgt also für ein Gas vom Molekulargewicht der Luft etwa dieselbe räumliche Druckverteilung, wie für Luft auf der Erde. - Rechnet man genauer, so findet man eine Zunahme vor. Druck und Dichte auf das 10-fache für ein Gas vom Molekulargewicht der Luft (28.9) auf je 14,7 km, für Wasserstoff auf je 212 km. Da 725 km auf der Sonne einem Winkelwert von einer Bogensekunde von der Erde aus gesehen entsprechen, so ist klar, daß die Sonne völlig scharf begrenzt aussehen muß.

2.2 Adiabatisches Gleichgewicht

(Heutige Bezeichnung »Troposphäre«) Wenn eine Gasmasse sich adiabatisch ausdehnt (z. B. durch schnelles Aufsteigen in höhere Schichten mit geringerem Druck), so gelten die Poisson'schen Beziehungen:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^k = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (5)$$

¹⁾Die absolute Temperatur in Centesimalgraden wird heute mit K bezeichnet

wobei p_0 und ϱ_0 irgendwelche zusammengehörigen Ausgangswerte bezeichnen. Die Größe k , das Verhältnis der spezifischen Wärme hängt ab von der Zahl f der nicht eingefrorenen Freiheitsgrade mit $k = (f + 2)/f$ und dadurch ist für ein 1-atomiges Gas wegen $f = 3$ Translationsfreiheitsgraden k gleich $5/3$, für ein 2-atomiges und ein lineares 3-atomiges Gas ist wegen $f = 5$ (3 Translationsfreiheitsgrade und 2 Rotationsfreiheitsgrade) k gleich $7/5$, für ein dreiatomiges winkliges Gas ist wegen $f = 6$ (3 Translationsfreiheitsgrade und 3 Rotationsfreiheitsgrade) $k = 4/3$, und nimmt für mehratomige Gase bis auf 1 ab. Das Gleichgewicht einer Atmosphäre heißt adiabatisch, wenn an jeder Stelle die Temperatur herrscht, welche eine von unten aufsteigende, sich adiabatisch abkühlende Gasmasse an dieser Stelle annehmen würde²⁾, wenn also innerhalb der ganzen Atmosphäre die Gleichung (5 auf der vorherigen Seite) erfüllt ist. Es folgt dann aus Gleichung (3 auf der vorherigen Seite) durch Einsetzen von Gleichung (5 auf der vorherigen Seite) und Integration:

$$t - t_0 = \frac{k - 1}{k} \frac{Mg}{R} (h - h_0) \Rightarrow \frac{dt}{dh} = \frac{k - 1}{k} \frac{Mg}{R} \quad (6)$$

Die Temperatur ändert sich linear mit der Höhe. Der Temperaturgradient berechnet sich für die Erdatmosphäre zu 1° auf je 100 m, für die Sonne wird er 27,7 mal größer als auf der Erde. Die Temperaturzunahme um einen Grad erfolgt dort also für Luft auf je 3,63 m, für Wasserstoff auf je 52 m. Die Atmosphäre hat eine bestimmte äußere Grenze ($t = \varrho = p = 0$). Die Tiefe einer Schicht von 6000° Temperatur unter der äußeren Grenze beträgt auf der Sonne für Luft 22 km, für Wasserstoff 300 km.

2.3 Strahlungsgleichgewicht

(Heutige Bezeichnung »Stratosphäre«) Wenn man sich vorstellt, daß die äußeren Teile der Sonne einen kontinuierlichen Übergang zu immer heißeren und dichteren Gasmassen bilden, so kann man nicht unterscheiden zwischen strahlenden und absorbierenden Schichten, sondern hat jede Schicht gleichzeitig als absorbierend und strahlend anzusehen. Wir wissen, daß ein mächtiger Energiestrom, aus unbekanntem Quellen im Sonneninnern³⁾ entspringend, die Sonnenatmosphäre durchsetzt und in den Außenraum dringt. Welche Temperaturen würden beim Fehlen durchmischender Bewegungen die einzelnen Schichten der Sonnenatmosphäre annehmen müssen, damit sie einen solchen Energiestrom ohne weitere eigene Temperaturänderung stationär befördern?

Man nehme an, jede Höhenschicht dh der Sonnenatmosphäre absorbiere den Bruchteil adh der hindurchgehenden Strahlung - ganz gleich ob sie von unten oder oben kommt. Ist E^4 die Emission eines schwarzen Körpers von der Temperatur dieser Höhenschicht und nimmt man das Kirchhoff'sche Gesetz als gültig an, so folgt, daß diese Höhenschicht die Energie $E \cdot a \cdot dh$ nach jeder Seite ausstrahlt⁵⁾.

²⁾Heute werden die Verhältnisse umgekehrt betrachtet, man fragt, welche Temperatur eine bestimmte Gasmasse annehmen würde, wenn sie adiabatisch auf Oberflächendruck komprimiert wird und bezeichnet das als potentielle Temperatur. Voraussetzung dafür, daß die potentielle Temperatur in jeder Höhe etwa gleich ist, ist eine schnelle Vertikalzirkulation zur Einhaltung der Adiabatenbedingung. Änderungen der potentiellen Temperatur mit der Höhe sind z. B. durch die Kondensationswärme (Wolken) des Wasserdampfes verursacht.

³⁾Heute ist die damals unbekannt Quelle als Fusionsreaktion bekannt.

⁴⁾Heute verwendet man statt des Buchstabens E den Buchstaben B

⁵⁾Der Absorptionskoeffizient ist zwar für jede Richtung gleich, aber als Gesamtwert nach oben bzw. unten ergibt er sich als Integral über alle Winkelverteilungen - siehe Gleichung (20a auf Seite 12). Da die Winkelverteilung der Strahlung nach oben und unten unterschiedlich ist (die Strahlung von oben stammt aus um so kühleren Schichten um so größer die Höhe des Emissionsortes ist. Bei der Strahlung von unten ist es umgekehrt. Diese Unterschiede in der Winkelverteilung ergeben als integrale Größe 3 verschiedene Absorptionskoeffizienten (von oben und von unten etwas unterschiedlich) und einen Emissionskoeffizienten der zwischen den beiden unterschiedlichen Absorptionskoeffizienten liegt.

Man betrachte jetzt die Strahlungsenergie A , die durch die Sonnenatmosphäre an irgend einer Stelle nach außen wandert, und die Strahlungsenergie B , die (infolge der Strahlung der weiter außen liegenden Schichten) nach innen wandert. Die Strahlungsenergie B , die (infolge der Strahlung der weiter außen liegenden Schichten) nach unten wandert (innen ist näher zum Mittelpunkt) wird heute »Gegenstrahlung« genannt.

Man verfolge zunächst die nach innen wandernde Energie B . Geht man um eine unendlich dünne Schicht dh nach innen, so geht von der von außen kommenden Energie B der Bruchteil $B \cdot adh$ verloren, auf der anderen Seite kommt durch die nach der einen Seite gehende Eigenstrahlung der Schicht dh der Betrag $aEdh$ hinzu, es ergibt sich also im Ganzen:

$$\frac{dB}{dh} = a(E - B) \quad (7)$$

Völlig analog folgt für die nach außen gehende Strahlung⁶⁾:

$$\frac{dA}{dh} = -a(E - A) \quad (8)$$

Indem man sich das Absorptionsvermögen a als Funktion der Tiefe h gegeben denkt, bilde man die über der Tiefe h liegende »optische Masse« der Atmosphäre:

$$m = \int_0^h adh \quad (9)$$

Dann lauten die Differentialgleichungen:

$$\frac{dB}{dm} = E - B \quad \frac{dA}{dm} = A - E \quad (10)$$

Wir fragen nach einem stationären Zustand der Temperaturverteilung. Derselbe ist bedingt durch die Forderung, daß jede Schicht ebensoviel Energie empfängt, als sie ausstrahlt, daß also gilt:

$$aA + a \cdot B = 2aE \quad A + B = 2E$$

Führt man dieser Bedingung entsprechend die Hilfsgröße γ ein durch:

$$A = E + \gamma \quad B = E - \gamma$$

so gehen die Differentialgleichungen durch Addition und Subtraktion über in:

$$\frac{d\gamma}{dm} = 0 \quad \frac{dE}{dm} = \gamma$$

und integriert:

$$\begin{aligned} \gamma &= const & E &= E_0 + \gamma m \\ A &= E_0 + \gamma(m + 1) & B &= E_0 + \gamma(m - 1) \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten E_0 und γ wurden dadurch bestimmt, daß an der Außengrenze der Atmosphäre ($m = 0$) keine nach innen wandernde Energie B vorhanden ist und die nach außen wandernde Energie den zu beobachtenden Betrag A_0 hat. Es muß also für $m = 0$

$$B = 0 \quad A = A_0$$

sein. Hiermit ergibt sich das

⁶⁾Das Vorzeichen folgt aus der Strahlrichtung.

Resultat:

$$E = \frac{A_0}{2}(1 + m) \quad A = \frac{A_0}{2}(2 + m) \quad B = \frac{A_0}{2}m \quad (11)$$

Es läßt sich also nur unter Voraussetzung des Kirchhoff'schen Gesetzes die Abhängigkeit der Strahlung E von der über der betreffenden Stelle liegenden optischen Masse ableiten.

Will man die Verteilung von Druck und Dichte, die bei Strahlungsgleichgewicht herrscht, kennen lernen, so hat man im Grunde eine detailliertere Untersuchung nötig, welche die Strahlung in den einzelnen Wellenlängen betrachtet. Es genüge hier für eine erste Übersicht⁷⁾ die Annahme, daß der Absorptionskoeffizient unabhängig von der Farbe und der Dichte proportional sei:

$$a = \varrho\kappa \quad (12)$$

(κ ist eine Konstante, die von der Menge der absorbierenden Gas abhängt). Dann folgt:

$$m = \int adh = \kappa \cdot \int \varrho dh = \frac{\kappa}{g} \cdot p \quad (13)$$

Die Strahlung E des schwarzen Körpers ist nach dem Stefan'schen Gesetz:

$$E = c \cdot t^4 \quad (c^8 \text{ ist eine Konstante}) \quad (13a)$$

Setzt man für die nach außen gelangende Energie A_0 :

$$A_0 = c \cdot T^4$$

so ist T das, was man gewöhnlich als (effektive) Temperatur der Sonne angibt. Sie ist rund $T = 6000^\circ$. Für das Strahlungsgleichgewicht gilt dann nach Gleichung (11) :

$$t^4 = \frac{1}{2}T^4 \left[1 + \frac{\kappa}{g} \cdot p \right] \quad (14)$$

Unter Einführung der an der äußeren Grenze der Atmosphäre herrschenden Temperatur $\tau \left(= \frac{T}{\sqrt[4]{2}} \right)$ kann man dafür auch schreiben:

$$t^4 = \tau^4 \left[1 + \frac{\kappa}{g} p \right] \Rightarrow p = \frac{g}{\kappa} \left[\frac{t^4}{\tau^4} - 1 \right] \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{g}{\kappa} \cdot \frac{4t^3}{\tau^4} \Rightarrow \frac{dt}{dp} = \frac{\kappa}{g} \cdot \frac{\tau^4}{4t^3} \quad (14a)$$

Geht man hiermit in Gleichung (3 auf Seite 5) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dh} &= \frac{M}{R} \cdot \frac{g}{t} \cdot \frac{g}{\kappa} \left[\frac{t^4}{\tau^4} - 1 \right] \cdot \frac{\kappa}{g} \cdot \frac{\tau^4}{4t^3} = \frac{M}{R} \cdot g \cdot \frac{t^4 - \tau^4}{4t^4} \\ \frac{M}{R} gh &= \int \frac{4t^4 dt}{t^4 - \tau^4} = \tau \left[4 \frac{t}{\tau} + \ln \frac{\frac{t}{\tau} - 1}{\frac{t}{\tau} + 1} - 2 \arctan \frac{t}{\tau} \right] + const \end{aligned} \quad (15)$$

⁷⁾Wenn man statt der ersten Übersicht genauer rechnen will oder muß, so muß man die Wellenlängen-, Druck-, Temperaturabhängigkeit berücksichtigen, ebenso wie die Winkelverteilung der Strahlung.

Diese Gleichung gibt die Temperatur als Funktion der Tiefe. Die zugehörige Dichte folgt aus [Gleichung \(1 auf Seite 5\)](#) und [Gleichung \(14a auf der vorherigen Seite\)](#):

$$\varrho = \frac{M}{R} \frac{p}{t} = \frac{Mg}{R\kappa} \frac{t^4 - \tau^4}{t\tau^4} \quad (16)$$

Das nachstehende Täfelchen gibt die Werte, die aus Gleichung (11 auf der vorherigen Seite), Gleichung (15 auf der vorherigen Seite) und Gleichung (16) folgen, wenn man die [äußere Sonnenatmosphäre](#) aus unserer Luft ([d.h. Erdatmosphäre](#)) bestehen läßt. Für den Absorptionskoeffizienten der Luft hat man etwa $\kappa = 0,6$ anzusetzen. Aus der Effektivtemperatur $T = 6000^\circ$ folgt für die Temperatur der äußeren Grenze $\tau = 5050^\circ$. Die Tiefe h ist von einer Stelle an gerechnet, an welcher die Temperatur das 1,5-fache dieser Grenztemperatur beträgt. Damit sind die Grundlagen der Rechnung gegeben.

Tiefe h	t	m	ϱ
$-\infty$	5050°	0,000	0,00
$-36,9 \text{ km}$	5060°	0,008	0,02
$-19,1$	5300°	0,215	0,51
$0,0$	7570°	4,06	6,8
$+12,6$	$10\ 100^\circ$	15,0	18,7
$+55,7$	$20\ 200^\circ$	255,0	159,4

Um die entsprechende Tabelle für eine Atmosphäre aus Wasserstoff zu erhalten, hätte man die Tiefe h mit 14,4 zu multiplizieren, die Dichte ϱ einerseits durch 14,4 zu dividieren, andererseits mit einem Faktor zu multiplizieren, der angibt, um wie viel dieselbe Masse Wasserstoff durchsichtiger ist, als Luft. Die beiden Spalten t und m blieben unverändert.

Man erkennt, daß sich das Strahlungsgleichgewicht mit der Erhebung über die Sonne mehr und mehr dem isothermen Gleichgewicht, welches der Grenztemperatur τ entspricht, nähert und, daß es, wie dieses, theoretisch eine unendliche Erstreckung der Atmosphäre zur Folge hat.

3 Stabilität des Strahlungsgleichgewichts

Von besonderem Interesse ist ein Vergleich des Temperaturgradienten bei Strahlungs- und bei adiabatischem Gleichgewicht. Ist nämlich der Temperaturgradient kleiner als bei adiabatischem Gleichgewicht, so gerät eine aufsteigende Luftmasse in Schichten, welche wärmer und dünner sind, als sie selbst ankommt, sie erfährt daher einen Druck nach unten. Ebenso erfährt dann eine absteigende Luftmasse einen Druck nach oben. Ein Gleichgewicht mit kleinerem Temperaturgradienten, als das adiabatische ([Stratosphäre](#)), ist daher stabil, umgekehrt eines mit größerem Temperaturgradienten instabil ([Troposphäre](#)).

Für adiabatisches Gleichgewicht gilt nach Gleichung (6 auf Seite 6):

$$\frac{dt}{dh} = \frac{k-1}{k} \frac{Mg}{R}$$

für Strahlungsgleichgewicht nach Gleichung (15 auf der vorherigen Seite):

$$\frac{dt}{dh} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\tau^4}{t^4} \right) \frac{Mg}{R} \quad (16a)$$

Stabilitätsbedingung ist also:

$$1 - \frac{\tau^4}{t^4} < 4 \frac{k-1}{k} \quad (17)$$

welche für $k > 4/3$ immer erfüllt ist.

Das Strahlungsgleichgewicht ist demnach überall stabil, so lange das Gas, welches die Atmosphäre bildet, ein-, zwei- oder dreiatomig ist. Für mehratomige Gase würde in tieferen Schichten (von höherer Temperatur t) Instabilität eintreten. Die Grenze zwischen beiden Schichten wird heute Tropopause genannt. Die »tieferen Schichten«, also unterhalb der Tropopause ist die Troposphäre, oberhalb der Tropopause also die Stratosphäre.

Es wird daher hier die Vorstellung nahe gelegt, daß eine äußere Schale der Sonnenatmosphäre (und auch der Erdatmosphäre) sich in stabilem Strahlungsgleichgewicht befindet (Stratosphäre), während sich vielleicht in der Tiefe eine dem adiabatischen Gleichgewicht angenäherte Zone auf- und absteigender Ströme (Troposphäre) erstreckt, die dann zugleich die Entnahme der Energie aus ihren eigentlichen Quellen (Erdoberfläche) besorgen wird.

3a Zusatzbemerkung 2015

Gleichung (14a auf Seite 8) wird umgestellt:

$$\frac{t^4}{\tau^4} = 1 + \frac{\kappa}{g}p \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau^4}{t^4} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{g}p} \quad (17a)$$

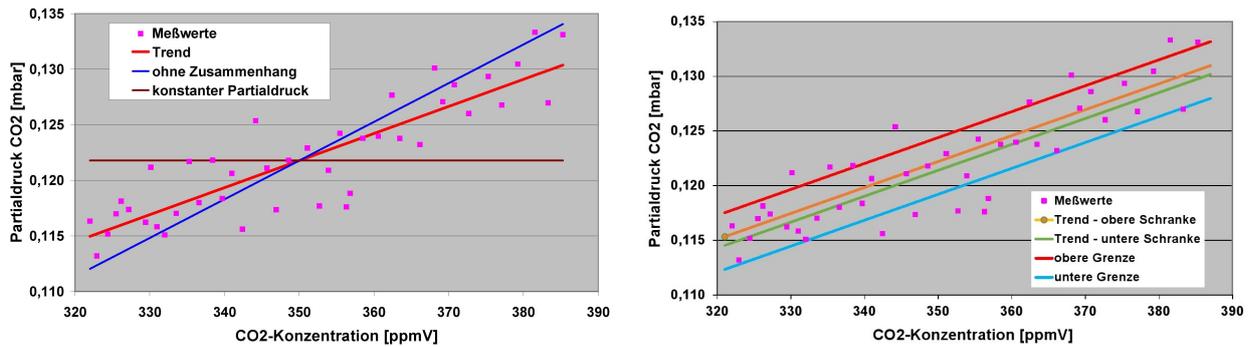
Die Gleichung (17a) wird in Gleichung (16a auf der vorherigen Seite) eingesetzt:

$$\frac{dt}{dh} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{g}p} \right) \frac{Mg}{R} = \frac{Mg}{4R} \frac{\frac{\kappa}{g}p}{1 + \frac{\kappa}{g}p} = \frac{Mg}{4R} \frac{1}{\frac{g}{\kappa p} + 1} \quad (17b)$$

Im Rahmen der von Schwarzschild verwendeten Vereinfachungen ist der Temperaturgradient in der Stratosphäre nach Gleichung (17b) nur vom Produkt κp abhängig. Wenn die Treibhausgaskonzentration zunimmt, nimmt κ zu. Bei einem bestimmten Temperaturgradienten ist die Tropopause, d.h. die Troposphäre beginnt (siehe Abschnitt 3 auf der vorherigen Seite). Bei Zunahme der Treibhausgaskonzentration muß deshalb der Tropopausendruck abnehmen, damit das Produkt κp konstant bleibt. Weil in der Realität die Vereinfachungen usw. wenig zutreffen, wird in der Realität das Produkt nicht ganz konstant bleiben. Es gibt zwei Möglichkeiten der Überwindung dieses Mangels: Entweder eine genaue Rechnung z. B. auf Basis der HITRAN2012 Datenbank Rothman u. a. (2013) oder auf der Basis von Messungen - siehe Diagramm 1 auf der nächsten Seite.

4 Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe

Jeder Temperaturverteilung längs der Vertikalen in der Sonnenatmosphäre entspricht bei unseren Annahmen eine bestimmte Verteilung der Helligkeit auf der Sonnenscheibe.



Diagr. 1: Auswertung der 42-jährigen Meßwerte in Hohenpeißen Hohenpeißen (2014)

Wir hatten früher die Gesamtenergie A betrachtet, die durch die Sonnenatmosphäre nach außen wandert, ohne die einzelnen Bestandteile zu trennen, welche unter verschiedenen Neigungen gegen die Vertikale laufen, und wir hatten den Absorptionskoeffizienten für die Gesamtenergie mit a bezeichnet. Dieses a gibt einen Durchschnittswert aus den für alle möglichen Neigungen gültigen Absorptionskoeffizienten. Wegen der Temperaturgradienten ist der Durchschnittswert für auf- und absteigender Ströme unterschiedlich.

Wir wollen jetzt die in einer bestimmten Richtung wandernde Strahlung isoliert betrachten und mit $F(i)$ grade die Strahlung bezeichnen, die sich, unter dem Winkel i gegen die Vertikale bewegt. Es bezeichne α den Absorptionskoeffizienten für Strahlung, welche die Atmosphäre normal durchsetzt. Dann ist offenbar $\frac{\alpha}{\cos i}$ der Absorptionskoeffizient für unter dem Winkel i verlaufende Strahlung. Man erhält daher für F in völliger Analogie zu Gleichung (8 auf Seite 7) die Differentialgleichung:

$$\frac{dF}{dh} = -\frac{\alpha}{\cos i}(E - F) \quad (18)$$

oder:

$$\frac{dF}{d\mu} = -\frac{1}{\cos i}(E - F)$$

wenn man die Abkürzung:

$$\mu = \int_{-\infty}^h \alpha dh \quad (19)$$

einführt. Die Integration ergibt für die aus der Atmosphäre austretende Strahlung:

$$F(i) = \int_0^{\infty} E e^{-\mu \sec i} d\mu \sec i \quad 9) \quad (20)$$

Es läßt sich also $F(i)$ berechnen, sobald man die Temperaturverteilung längs der Vertikalen und damit E als Funktion von μ kennt.

Nun hängt aber μ mit der früher eingeführten optischen Masse m zusammen. Man betrachte die Gesamtstrahlung, die auf ein horizontales Flächenelement ds innerhalb der Atmosphäre von unten auffällt. Dieselbe wird gegeben durch das Integral über die aus allen möglichen Richtungen eintreffende Strahlung:

⁹⁾ Die Funktion $\sec = 1/\cos$ wird heute kaum noch verwendet.

$$J = 2\pi ds \int_0^{\pi/2} di \sin i \cos i F(i)$$

Die Absorption, welche diese Strahlung innerhalb der Schicht dh erleidet, wird sein:

$$\begin{aligned} dJ &= 2\pi ds \int_0^{\pi/2} di \sin i \cos i F(i) \cdot \frac{\alpha dh}{\cos i} \\ &= 2\pi ds \alpha dh \int_0^{\pi/2} di \sin i F(i) \end{aligned}$$

Der früher verwandte Absorptionskoeffizient für die Gesamtenergie a war definiert durch die Beziehung:

$$\frac{dJ}{J} = a dh$$

Die Vergleichung mit den vorstehenden Formeln ergibt:

$$a = \alpha \cdot \frac{\int_0^{\pi/2} di \sin i F(i)}{\int_0^{\pi/2} di \sin i \cos i F(i)} \quad (20a)$$

Wenn $F(i)$ für kleine Neigungen i einigermäßen konstant ist und sich erst für i in der Nähe von 90° rascher ändert wie das bei der Sonne nach den unten folgenden empirischen Ergebnissen der Fall ist - so erhält man eine Näherung für a , indem man $F(i)$ überhaupt als unabhängig von i betrachtet, und zwar folgt dann durch Ausführung der Integrale:

$$a = 2\alpha \quad (21)$$

Von dieser Beziehung wollen wir Gebrauch machen. Es ergibt sich aus Gleichung (9 auf Seite 7) und Gleichung (19 auf der vorherigen Seite):

$$m = 2\mu$$

und damit statt Gleichung (20 auf der vorherigen Seite):

$$F(i) = \int_0^\infty E e^{-\frac{m}{2} \sec i} \frac{dm}{2} \sec i \quad (22)$$

Es ist also nunmehr $F(i)$ bekannt, sobald E als Funktion der optischen Masse m gegeben ist. Die Funktion $F(i)$ liefert aber auch sofort die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe. Dem die Strahlung, die wir auf der Sonnenscheibe im scheinbaren Abstand r vom Zentrum der Scheibe beobachten, hat offenbar die Sonnenatmosphäre unter einem Winkel i durchsetzt, der durch die Gleichung bestimmt wird:

$$\sin i = \frac{r}{R} \quad (23)$$

Hierbei bezeichnet R den scheinbaren Sonnenradius. Die Verbindung von Gleichung (22) und Gleichung (23) liefert zu jedem r die zugehörige Helligkeit F .

Sehr übersichtlich wird der Zusammenhang zwischen der Strahlungsverteilung in der Tiefe E und der Helligkeitsverteilung auf der Oberfläche F , wenn sich E in eine Potenzreihe nach m entwickeln läßt:

$$E = \beta_0 + m\beta_1 + m^2\beta_2 + \dots \quad (24)$$

Dann folgt nämlich sofort aus Gleichung (22 auf der vorherigen Seite):

$$F = \beta_0 + 2 \cdot 1! \beta_1 \cos i + 4 \cdot 2! \beta_2 \cos^2 i + \dots \quad (25)$$

Läßt sich E als eine Summe gebrochener Potenzen von m darstellen:

$$E = \sum_n \beta_n \cdot m^{\gamma_n} \quad (26)$$

so folgt für F :

$$F = \sum_n \Gamma(\gamma_n) \beta_n (2 \cos i)^{\gamma_n} \quad (27)$$

wo Γ die Γ -Funktion bedeutet ($\Gamma = \text{Gamma-Funktion}$). Auch hier ist der Übergang von E zu F also noch einfach zu bewerkstelligen.

Wir wollen insbesondere betrachten, wie sich die Helligkeitsverteilung bei adiabatischem und bei Strahlungsgleichgewicht stellt.

Für **S t r a h l u n g s g l e i c h g e w i c h t** gilt nach Gleichung (11 auf Seite 8):

$$E = \frac{A_0}{2}(1 + m)$$

Daraus folgt nach Gleichung (24) und Gleichung (25)

$$F(i) = \frac{A_0}{2}(1 + 2 \cos i)$$

oder, wenn man die Helligkeit im Zentrum der Sonnenscheibe ($i = 0$) als Einheit nimmt:

$$F(i) = \frac{1 + 2 \cos i}{3} \quad (28)$$

Für **a d i a b a t i s c h e s G l e i c h g e w i c h t** galt die Beziehung Gleichung (5 auf Seite 5):

$$\frac{t}{t_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad t^4 = t_0^4 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{4\frac{k-1}{k}} \quad (28a)$$

Wenn wir ferner, wie oben, die Absorption für alle Farben gleich und der Dichte proportional voraussetzen, so besteht zwischen p und m der Zusammenhang Gleichung (13 auf Seite 8),

$$m = \frac{\kappa}{g} p \quad (28b)$$

Damit erhält man für E aus Gleichung (13a auf Seite 8), Gleichung (28a) und Gleichung (28b):

$$E = c \cdot t^4 = c_1 p^{4 \frac{k-1}{k}} = c_2 m^{4 \frac{k-1}{k}}$$

wobei c_1 und c_2 neue Konstanten bedeuten. Der zugehörige Ausdruck vom F wird nach Gleichung (26 auf der vorherigen Seite) und Gleichung (27 auf der vorherigen Seite) (zur Erinnerung: Γ ist hier nicht der Temperaturgradient, sondern die Γ -Funktion):

$$F(i) = c_2 \Gamma \left[4 \frac{k-1}{k} \right] (\cos i)^{4 \frac{k-1}{k}}$$

oder, wenn man wieder die zentrale Helligkeit als Einheit wählt (ist so einfach, weil die anderen Faktoren i nicht enthalten):

$$F(i) = (\cos i)^{4 \frac{k-1}{k}} \quad (29)$$

Die Formeln Gleichung (28 auf der vorherigen Seite) und Gleichung (29) sind mit der Beobachtung zu vergleichen. Außer den hier nicht in Frage kommenden spektral-photometrischen Untersuchungen für einzelne Farbgebiete gibt es eine Reihe von Messungen, die mit Thermosäulen und Bolometer angestellt sind und die angeben, wie sich die von allen Wellenlängen zugleich gelieferte Gesamtstrahlung über die Sonnenscheibe verteilt. Herr G. (Müller, 1897, S. 323) hat diese Messungen zusammengestellt und zu den Mittelwerten vereinigt, die in der zweiten Spalte des unten folgenden Täfelchens angegeben sind. Die theoretischen Werte für Strahlungsgleichgewicht und adiabatisches Gleichgewicht nach den Formeln Gleichung (28 auf der vorherigen Seite) und Gleichung (29) sind daneben gesetzt. Für das adiabatische Gleichgewicht ist $k = 4/3$ gesetzt, was einem 3-atomigen Gas entspricht¹⁰⁾. Ein- oder zwei-atomige Gase würden eine noch schlechtere Übereinstimmung ergeben und die physikalische Wahrscheinlichkeit spricht gewiß gegen mehr als 3-atomige Gase in den äußeren Teilen der Sonnenatmosphäre.

$\frac{r}{R}$	Messung	Strahlungsgleichgew.	Adiabat. Gleichgew.		
			3-atomig winklig	3-atomig linear 2-atomig	1-atomig
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,2	0,99	0,99	0,98	0,98	0,97
0,4	0,97	0,95	0,92	0,91	0,87
0,6	0,92	0,87	0,80	0,77	0,70
0,7	0,87	0,81	0,71	0,68	0,58
0,8	0,81	0,73	0,60	0,56	0,44
0,9	0,70	0,63	0,44	0,39	0,26
0,96	0,59	0,52	0,28	0,23	0,13
0,98	0,49	0,47	0,20	0,16	0,08
1,00	(0,40)	0,33	0,00	0,00	0,00

¹⁰⁾Heute kennt man die Zusammensetzung der Sonnenatmosphäre genauer und schon wegen der hohen Temperaturen ist das Gas weitgehend 1-atomig.

Man sieht, daß das Strahlungsgleichgewicht die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe so gut darstellt, als bei den vereinfachten Voraussetzungen, unter denen hier gerechnet worden ist, erwartet werden kann, daß das adiabatische Gleichgewicht hingegen ein ganz anderes Aussehen der Sonnenscheibe zur Folge hätte. Damit hat die Einführung des Strahlungsgleichgewichts eine gewisse empirische Rechtfertigung gefunden.

5 Verzeichnisse

Abbildungsverzeichnis

- 1 [Auswertung der 42-jährigen Meßwerte in Hohenpeißen Hohenpeissen \(2014\)](#) . 11

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

Die Zahlen am Ende einer Referenz sind die Seitennummern, wo die Referenz verwendet wird.

[Gold 1909] GOLD, Ernest: The Isothermal Layer of the Atmosphere and Atmospheric Radiation [Die isotherme Schicht der Atmosphäre und die atmosphärische Strahlung]. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 82 (1909), Nr. 551, S. 43 – 70. – URL <http://ia600701.us.archive.org/26/items/philtrans05311580/05311580.pdf>. – <http://www.jstor.org/stable/92968> - Übersetzung mit Kommentierung: <http://www.ing-buero-ebel.de/Treib/Gold.pdf> 2

[Hohenpeissen 2014] HOHENPEISSEN: *Daten Tropopause*. 2014. – Private Kommunikation mit DWD Hohenpeißenberg 11, 15

[Milne 1928] MILNE, Edward A.: The effect of collisions on monochromatic radiative equilibrium [Die Wirkung von Kollisionen auf das monochromatische Strahlungsgleichgewicht]. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 88 (1928), Apr, S. 493 – 502. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1928MNRAS..88..493M>. – übersetzt: <http://www.ing-buero-ebel.de/Treib/Milne.pdf> 4

[Müller 1897] MÜLLER, Gustav: *Die Photometrie der Gestirne*. Leipzig : Engelmann, 1897. – <http://ia600304.us.archive.org/20/items/diephotometriede00mluoft/diephotometriede00mluoft.pdf> 14

[Rothman u. a. 2013] ROTHMAN, L.S. u. a.: The {HITRAN2012} molecular spectroscopic database. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 130 (2013), Nr. 0, S. 4 – 50. – URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407313002859>. – {HITRAN2012} special issue. – ISSN 0022-4073 10

[Schuster 1905] SCHUSTER, Arthur: Radiation Through a Foggy Atmosphere [Strahlung durch eine trübe Atmosphäre]. In: *The Astrophysical Journal* 21 (1905), jan, S. 1 – 22. – URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1905ApJ....21....1S> 4

[Schwarzschild 1906] SCHWARZSCHILD, K.: Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1906 (1906), S. 41 – 53. – URL http://gdz-srv1.sub.uni-goettingen.de/gcs/gcs?&action=pdf&metsFile=PPN252457811_1906&divID=LOG_0009&pagesize=A4&pdf

[Seeliger 1891] SEELIGER, H.: Ueber die Extinction des Lichts in der Atmosphäre. In: *Bayerische Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse* 21 (1891), S. 247 – 272. – URL <http://archive.org/stream/sitzungsbericht387klasgoog#page/n867/mode/2up>. – ISSN 0340-7586 4